Exercices avec corrigé succinct du chapitre 5

(Remarque : les références ne sont pas gérées dans ce document, par contre les quelques **??** qui apparaissent dans ce texte sont bien définis dans la version écran complète du chapitre 5)

Exercice V.1

Soit f une fonction connue aux points d'abscisse t_i $(0 \leq i \leq n)$, supposées toutes distinctes. Soit l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Tout polynôme p de $\mathcal{P}_n$ peut s'écrire

$$p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n.$$

On cherche $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $p(t_i) = f(t_i), i = 0,...,n$.

Ecrire les conditions d'interpolation, montrer que le système linéaire obtenu admet une solution unique.

Solution : Le problème s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t_i^k = f(t_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

C'est donc un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Ce problème a une solution unique puisque la matrice M du système (appelée matrice de Van der Monde) est alors inversible.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & ... & t_0^n \\ 1 & t_1 & ... & t_1^n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_n & ... & t_n^n \end{pmatrix}$$

□

Exercice V.2

On suppose la fonction f connue aux points $\{-1,0,1\}$ où elle prend les valeurs $\{0,1,0\}$ et soit $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes de degré au plus m. Quelle est la valeur minimale de m qui conduit à une technique d'interpolation ? Pour quelle valeur de m le polynôme d'interpolation est unique ?

Solution : On doit avoir $m \geq 2$ car par trois points non alignés on ne peut faire passer une droite ! Pour $m = 2$, le polynôme d'interpolation s'écrit $p(t) = 1 - t^2$. Remarquons que pour $m > 2$, il passe un infinité de polynômes par trois points. □

Exercice V.3

On considère les points du plan $\{(t_i, z_i),\ 0 \leq i \leq n\}$ avec $t_0 < t_1 < ... < t_n$.

1. Écrire l'équation de la droite passant par les points (t_i, z_i) et (t_{i+1}, z_{i+1}) en utilisant la base de Lagrange.
2. Écrire l'équation de la ligne brisée qui interpole tous les points.

Solution :

1. La droite passant par les points (t_i, z_i) et (t_{i+1}, z_{i+1}) a pour équation $y = g_i(t)$. g_i s'écrit :

$$g_i(t) = z_i \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} + z_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

2. La ligne brisée a pour équation $y = g(t)$ où g est une fonction définie par morceau :

$$g(t) = \begin{cases} g_0(t) & \text{pour } t \in [t_0,t_1] \\ g_1(t) & \text{pour } t \in [t_1,t_2] \\ \dots \\ g_{n-1}(t) & \text{pour } t \in [t_{n-1},t_n] \end{cases}$$

On peut remarquer que $g_i(t_{i+1}) = g_{i+1}(t_{i+1}) = z_{i+1}$, la fonction g est une fonction continue sur $[t_0,t_n]$, par contre g n'est pas dérivable aux points $t_1,...,t_{n-1}$, en ces points la courbe présente des points anguleux, les derivées à droite et à gauche existent mais sont différentes.
On verra plus loin les splines cubiques qui sont également définies par morceaux, mais qui ont plus de régularité.

□

Exercice V.4

Soit n un entier naturel.

1. Calculer l'erreur commise en interpolant la fonction $f(t) = t^n$, définie sur l'intervalle $[0,1]$, en les points $t_i = i/n$, $i = 0,1,\dots,n$, à l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n. Expliquer le résultat.
2. Même question pour la fonction $g(t) = t^{n+1}$.

Solution :

1. Si l'on applique le résultat sur le calcul d'erreur, on trouve

$$e(t) = 0$$

car la dérivée d'ordre $n + 1$ d'un polynôme de degré n est nulle. Ce résultat s'explique car par $n + 1$ points il passe un polynôme et un seul de degré n, c'est donc t^n !

2. Si l'on applique le résultat sur le calcul d'erreur, on trouve

$$e(t) = \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!\pi_n(t) = \pi_n(t),$$

car la dérivée d'ordre $n + 1$ d'un polynôme de degré t^{n+1} est $(n + 1)!$.
On aurait pu retrouver ce résultat directement. Si l'on note p le polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $p(t_i) = g(t_i),i = 0,1,...,n$, alors $g - p$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n + 1$ qui vérifie $(g - p)(t_i) = 0$, donc $e(t) = (g - p)(t) = \alpha(t - t_0)(t - t_1)...(t - t_n)$, or le coefficient de t^{n+1} dans le polynôme $g - p$ est 1, donc $\alpha = 1$

□

Exercice V.5

Montrer que les polynômes

$$1, (t - t_0), (t - t_0)(t - t_1), \dots, (t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{n-1}),$$

forment une base de $\mathcal{P}_n$, ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Solution : Les polynômes étant tous de degré distinct, il est facile de montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Or $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Donc toute famille libre de $\mathcal{P}_n$ de $n + 1$ éléments est une base de $\mathcal{P}_n$. □

Exercice V.6

On a $t_0 = 1{,}t_1 = 2{,}t_2 = 3$, $f(t_0) = 1{,}f(t_1) = 3{,}f(t_2) = 4$.
Ecrire le polynome p_0 de degré 0 qui interpole f en t_0.
Ecrire le polynome p_1 de degré 1 qui interpole f en $t_0{,}t_1$.
Ecrire le polynome p_2 de degré 2 qui interpole f en $t_0{,}t_1{,}t_2$.
Ecrire chacun des polynômes dans la base de Newton.

Solution : On a

$$p_0(t) = f(t_0) = 1.$$

On a $p_1(t) = c_0 + c_1(t - t_0)$, on écrit que $p_1(t_0) = f(t_0){,}p_1(t_1) = f(t_1)$, on obtient les coefficients $c_0 = 1{,}c_1 = 2$,

$$p_1(t) = 1 + 2(t - 1).$$

On a $p_2(t) = c'_0 + c'_1(t - t_0) + c'_2(t - t_0)(t - t_1)$, on écrit que $p_2(t_0) = f(t_0){,}p_2(t_1) = f(t_1){,}p_2(t_2) = f(t_2)$, on obtient les coefficients $c'_0 = 1{,}c'_1 = 2{,}c'_3 = -\frac{1}{2}$,

$$p_2(t) = 1 + 2(t - 1) - \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2).$$

On remarque bien, comme indiqué dans le paragraphe de cours, que les polynômes sont 'emboités' et que pour chaque nouveau polynôme il suffit de calculer un seul coefficient. □

Exercice V.7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ donné, soit p_n le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en $t_0{,}t_1{,}...{,}t_n$, on veut évaluer l'erreur en θ, c'est à dire $e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta)$. Si θ est égal à l'un des t_i, l'erreur est nulle.

Supposons maintenant que $\theta \neq t_i, \forall i = 0,...,n$.

On définit alors le polynôme p par

$$p(t) = p_n(t) + \Pi_n(t)\frac{f(\theta) - p_n(\theta)}{\Pi_n(\theta)}$$

où $\Pi_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - t_i)$.

1. Montrez que p interpole f aux points $\{t_0{,}t_1{,}\ldots{,}t_n{,}\theta\}$. Quel est le degré de p?
2. En déduire $p(t) - p_n(t)$ en fonction de $f[t_0{,}t_1{,}\ldots{,}t_n{,}t]$.
3. En déduire le calcul de l'erreur $e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta)$.

Solution :

1. Par construction de p, il est facile de montrer que $p(t_i) = f(t_i)$ pour $i = 0{,}\ldots{,}n$ et $p(\theta) = f(\theta)$. Le degré de ce polynôme est évidemment égal à $n + 1$.
2. Les propriétés du polynôme de Newton donne :

$$p(t) = p_n(t) + f[t_0{,}t_1{,}\ldots{,}t_n{,}t]\Pi_n(t).$$

3. $$e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta) = p(\theta) - p_n(\theta) = f[t_0{,}t_1{,}\ldots{,}t_n{,}\theta]\Pi_n(\theta).$$

□

Exercice V.8
Soit la fonction f connue aux trois points d'abscisse t_0, t_1 et t_2. On considère le polynôme d'interpolation dans la base de Newton avec les notations du cours. Montrer, par le calcul, que

$$c_2 = f[t_0,t_1,t_2]$$

en utilisant la définition et la symétrie des différences divisées.
Solution : Le polynôme s'écrit

$$p(t) = c_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)(t-t_1).$$

Or

$$p(t_0) = f(t_0) \Rightarrow c_0 = f[t_0]$$

$$p(t_1) = f(t_1) \Rightarrow c_1 = \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{f(t_0)-f(t_1)}{t_0-t_1} = f[t_0,t_1]$$

$$p(t_2) = f(t_2) \Rightarrow c_2 = \frac{\frac{f(t_2)-f(t_0)}{t_2-t_0} - f[t_0,t_1]}{t_2-t_1} = \frac{f[t_2,t_0]-f[t_0,t_1]}{t_2-t_1} = f[t_2,t_0,t_1] = f[t_0,t_1,t_2]$$

On a utilisé la symétrie des différences divisées. □

Exercice V.9
Calculer les coefficients c_k du polynôme d'interpolation p_3 de l'exemple **??** , dans la base de Newton.
Solution : Pour calculer les coefficients de $p_3(t)$ dans la base de *Newton*, nous sommes conduits à construire le tableau proposé dans le cours pour $n = 3$, ce qui avec les données de l'exercice nous donne :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$t_0 = 0$	$f[t_0] = \frac{1}{2}$			
$t_1 = 1$	$f[t_1] = 1$	$f[t_0,t_1] = \frac{1}{2}$		
$t_2 = 2$	$f[t_2] = 2$	$f[t_1,t_2] = 1$	$f[t_0,t_1,t_2] = \frac{1}{4}$	
$t_3 = 3$	$f[t_3] = -\frac{1}{2}$	$f[t_2,t_3] = -\frac{5}{2}$	$f[t_1,t_2,t_3] = -\frac{7}{4}$	$f[t_0,t_1,t_2,t_3] = -\frac{2}{3}$

On peut donc écrire $p_3(t)$ de la façon suivante :

$$p_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2).$$

□

Exercice V.10
On a calculé à l'aide des différences divisées le polynôme p_n d'interpolation de f aux points $\{t_0,\dots,t_n\}$. On désire rajouter un point d'interpolation t_{n+1}. Doit-on refaire tout le tableau des différences divisées ? Et, si on utilisait la base des polynômes de Lagrange, devrait-on refaire tous les calculs ?
Solution : Si vous avez compris les calculs effectués dans le tableau des différences divisées du

paragraphe **??**, il suffit d'ajouter une ligne à ce tableau pour ajouter un point d'interpolation. Les coefficients $\{c_0, \dots ,c_n\}$ sont les mêmes que ceux de p_n le dernier coefficient de la dernière ligne donnera c_{n+1}. Si les calculs ont été faits à la main, vous les avez évidemment gardés. Par contre, si vous avez utilisé l'algorithme donné dans le même paragraphe, une colonne se superpose à la précédente, et le tableau complet n'est donc pas gardé en mémoire. Il faut donc penser à stocker le tableau ...

En ce qui concerne la base des polynômes de Lagrange, chacun d'eux est construit à partir de tous les points d'interpolation, ce qui nécessite de recalculer tous ces polynômes lorsque l'on rajoute un point d'interpolation ! □

Exercice V.11

Calculer le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour évaluer, en un point t, la valeur de

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + c_n(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{n-1}).$$

1. Par la méthode 'naturelle', en écrivant l'algorithme
2. Par le schéma de Horner.

Solution :

1. L'algorithme "classique" est le suivant :

   ```
   Les données sont : c_0, ..., c_n, t_0, ..., t_{n-1}, t
   q = t - t_0
   p = c_0 + c_1 * q
   pour k = 2 jusqu'à n faire
       q = q * (t - t_{k-1})
       p = p + c_k * q
   fin pour
   ```

   Ceci correspond à $2n - 1$ multiplications, n additions et n soustractions.
2. Le schéma de Horner, dont l'algorithme est donné dans le cours compte n multiplications, n additions et n soustractions.

□

Exercice V.12

Mettre en évidence expérimentalement, en utilisant un logiciel de calcul (Matlab, Scilab,...) les difficultés de l'interpolation polynomiale de la fonction $1/(1 + t^2)$ sur l'intervalle $[-5, + 5]$.

Exercice V.13

1. Compter le nombre de degrés de liberté à déterminer pour définir complètement une spline cubique.
2. Compter le nombre d'équations disponibles pour ce faire. Comparer.

Solution : Sur chacun des n intervalles $[t_i,t_{i+1}], i = 0,...,n - 1$, g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, on a donc $g(t) = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i t^2 + \delta_i t^3$, il y a donc $4n$ inconnues.

On doit avoir

$$g(t_i^+) = g(t_i^-), g'(t_i^+) = g'(t_i^-), g''(t_i^+) = g''(t_i^-), i = 1,...,n - 1$$

afin que la fonction g soit 2 fois continûment dérivable. On obtient donc $3(n - 1)$ équations.

La fonction g doit interpoler, on doit donc avoir $g(t_i) = y_i, i = 0, \ldots, n$.
On a donc au total $3n - 3 + n + 1 = 4n - 2$ équations.
Il manque donc deux équations, c'est pourquoi on impose, par exemple, les conditions supplémentaires :

$$g''(t_0) = g''(t_n) = 0$$

$\square$